Series divergentes*: aspectos analíticos, geométricos, y aritméticos

Luis Navas
Universidad de Salamanca

ENEM2015 — 31 de julio de 2015

∗ y también convergentes

Esquema

1. Reordenamientos
2. Geometría de las subseries
3. Series de potencias
4. Métodos de sumación
5. Euler, Riemann y la función zeta
6. Aproximación Diofántica

Sección 1

Reordenamientos

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (podemos pensar que es $\mathbb{R}^n$). Consideramos una serie con valores en X:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)$$

Está determinada por su término general, la sucesión $u : \mathbb{N} \to X$.

Pregunta central: ¿qué información está contenida en la serie?

Seguramente lo primero que se nos ocurre es intentar sumarla, asociándole un punto de X. Las series convergentes forman un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y la suma

$$\Sigma : u \mapsto \Sigma u = \sum_{n=1}^{\infty} u(n) \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u(n) \in X$$

es un operador lineal sobre este espacio. Es habitual el abuso de la notación «Σ» para denotar tanto a una serie abstracta como a su suma, si existe.

Surge la cuestión de la «conmutatitividad de una suma infinita».

Reordenamientos

El grupo $S_{\mathbb{N}}$ de permutaciones $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ actúa sobre series por

$$u \mapsto u^{\sigma}, \quad u^{\sigma}(n) \stackrel{\text{def}}{=} u(\sigma(n)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u(n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u(\sigma(n)),$$

dando el σ-reordenamiento de u.

$\mathcal{R} = \mathcal{R}(u)$ denota a la colección de reordenamientos de u.

$\mathcal{R}_c = \mathcal{R}_c(u)$ son los reordenamientos convergentes. $\mathcal{R}_c \subseteq \mathcal{R}$.

$\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r(u) = \Sigma(\mathcal{R}_c(u))$, el conjunto de sumas reordenadas. $\mathcal{S}_r \subseteq X$.

Convergencia incondicional y absoluta

Una serie converge **incondicionalmente** si todos sus reordenamientos convergen.

No se exige que tengan la misma suma. Para series en un espacio de Banach, es una consecuencia (no inmediata) de la definición. Es decir,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_c, \quad \mathcal{S}_r = \{\Sigma u\} \quad \text{(un punto)}$$

para una serie incondicionalmente convergente.

Una serie converge **absolutamente** si $\sum_n |u(n)| < \infty$.

Convergencia absoluta y reordenamientos

1. En todo espacio de Banach, la convergencia absoluta implica la incondicional.
2. En dimensión finita, la convergencia incondicional implica la absoluta.
3. En dimensión infinita, existen series incondicionalmente pero no absolutamente convergentes (Teorema de Dvoretzky–Rogers).

Una serie es condicionalmente convergente si es convergente pero no incondicionalmente convergente.

Teorema de Riemann

Para una serie real condicionalmente convergente,

$$\mathcal{S}_r = \mathbb{R}.$$

O sea, dado $x \in \mathbb{R}$, existe un reordenamiento con suma x.

También existen reordenamientos divergentes tales que:

- las sumas parciales divergen a $\pm\infty$,
- el cierre de las sumas parciales es un intervalo dado.

El Teorema de Riemann (demostración)

Demostración: Sea $\sum_n u(n)$ condicionalmente convergente. Dividimos en su parte positiva $u^+(n)$ y su parte negativa $u^-(n)$,

$$u^+(n) = \begin{cases} u(n) & u(n) \geq 0, \\ 0 & u(n) < 0, \end{cases} \qquad u^-(n) = \begin{cases} 0 & u(n) \geq 0, \\ -u(n) & u(n) < 0, \end{cases}$$

Las dos partes son de hecho positivas y satisfacen

$$u = u^+ - u^-, \qquad |u| = u^+ + u^-$$

La convergencia condicional implica que $\sum u^+ = \sum u^- = \infty$ y $\lim u = 0$.

Dado x, vamos sumando términos de u^+ hasta hacer la suma mayor que x, luego de u^- hasta hacerla menor que x, y así sucesivamente. Esto lleva a un reordenamiento cuyas sumas parciales tienen límite x. ∎

Un ejemplo: la serie armónica alternante

La serie armónica alternante es condicionalmente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2.$$

Un reordenamiento de la serie armónica alternante es simple si mantiene el orden original en los términos positivos y negativos.

Es un modo particular de «barajar» la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

es un reordenamiento simple, pero

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$

no lo es al irse trasponiendo pares positivos y negativos.

Teorema de Pringsheim [1]

Un reordenamiento simple de la serie armónica alternante converge a un número real extendido (en $[-\infty, \infty]$) si y sólo si existe la densidad $p = \lim_n n^{-1} p_n$, donde p_n es el número de términos positivos entre los n primeros. En tal caso la suma es $\log 2 + \log(p\,(1-p)^{-1})$.

En el ejemplo anterior, $p = 1$, luego ese reordenamiento diverge a ∞.

Como $\lim_{p\to 0,1} \log(p(1-p)^{-1}) = \pm\infty$, es una verificación de que $\mathcal{S}_r = \mathbb{R}$, suponiendo que podemos alcanzar cualquier densidad $p \in (0,1)$ dada.

Es fácil obtener una proporción racional $p = r/s$ (tomar bloques sucesivos de longitudes r y s), pero ¿cómo obtendríamos una irracional, por ejemplo $1/\pi$?

El conjunto de sumas en general

Para una serie convergente real, hemos visto que $\mathcal{S}_r$ es un punto (convergencia absoluta) o toda la recta $\mathbb{R}$ (convergencia condicional).

Una serie real divergente $\sum u$ puede tener un reordenamiento convergente $\sum u^\sigma$, necesariamente condicional. En tal caso

$$\mathcal{R}_c(u) = \mathcal{R}_c(u^\sigma) = \mathbb{R}.$$

Si $\sum u$ no tiene ningún reordenamiento convergente, $\mathcal{R}_c = \varnothing$.

Por ejemplo, esto ocurre para toda serie divergente no negativa, o toda serie cuyo término general no tienda a cero.

¿Qué ocurre para una serie **compleja**?

Si $\sum u$ es una serie compleja, entonces su conjunto de sumas reordenadas es el vacío, un punto, una recta, o todo el plano.

Consideremos ahora series en un espacio de Banach X real de dimensión finita.

Teorema de Lévy (1905) y Steinitz (1913)

El conjunto de sumas reordenadas de una serie en un espacio de Banach real finito-dimensional, bien es vacío, bien es un subespacio afín.

Es notorio por ser un enunciado sencillo pero difícil de demostrar (ver [4]).

Demostración: (ideas) Sea $\sum_n u(n)$ con $u : \mathbb{N} \to X$. Si ningún reordenamiento de $\sum_n u(n)$ es convergente, entonces $\mathcal{S}_r = \varnothing$ y hemos acabado. Por tanto podemos suponer que $\sum_n u(n)$ es convergente.

Consideramos los funcionales sumatorios

$$W(u) = \left\{ \omega \in X^* : \sum_{n=1}^{\infty} |\omega(u(n))| < \infty \right\} \subseteq X^*$$

$W(u)$ es un subespacio del dual X^*. Consideramos el anulador

$$W(u)^\perp = \{x \in X : \omega(x) = 0\ \forall \omega \in W\} \subseteq X.$$

Se tiene

$$\mathcal{S}_r(u) \subseteq \Sigma u + W(u)^\perp \qquad (*)$$

ya que si $\sum u^\sigma$ es convergente, entonces para $\omega \in W(u)$

$$\omega(\Sigma u^\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(u(\sigma(n))) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(u(n)) = \omega(\Sigma u)$$

(por continuidad y convergencia absoluta).

Entonces $\omega(\Sigma u^\sigma - \Sigma u) = 0$, o sea $\Sigma u^\sigma - \Sigma u \in W(u)^\perp$.

El Teorema de Lévy y Steinitz (III)

Lo realmente difícil es demostrar la igualdad en $(*)$:

$$\mathcal{S}_r(u) = \Sigma u + W(u)^{\perp} \qquad (**)$$

La clave está en la geometría de los espacios de Banach de dimensión finita:

Teorema de confinamiento poligonal de Steinitz

Si X es un espacio de Banach de dimensión finita, existe una constante $c(X)$ tal que cuando $x_1 + \cdots + x_n = 0$ con $\|x_j\| \leq 1$, hay una biyección $\sigma \in S_n$ con

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)} \right\| \leq c(X), \quad 1 \leq m \leq n.$$

$c(X)$ se conoce como constante de Steinitz. Su valor exacto es desconocido si $\dim X > 2$. Se sabe que $0 < c(X) \leq \dim E$. ■

Insatisfacción

La dificultad del asunto se refleja en que un espacio de Fréchet es nuclear en el sentido de Grothendieck si y sólo si las series convergentes satisfacen ($**$) (Banaszczyk 1993)

Sección 2

Geometría de las subseries

En general podemos considerar las subseries finitas o infinitas de τ términos,

$$\sum_{n=1}^{\tau} u(\sigma(n)), \quad \sigma : \mathbb{N}_\tau \to \mathbb{N} \quad \text{inyectiva}, \quad \mathbb{N}_\tau = \begin{cases} \varnothing & \tau = 0 \\ \{1, \ldots, \tau\} & \tau < \infty \\ \mathbb{N} & \nu = \infty \end{cases}$$

(el valor de la suma vacía se define como 0). Si σ es creciente, son subseries ordenadas. Definimos los conjuntos de (sub)sumas (finitas/infinitas/todas)

$$\mathcal{S}(u) = \{\text{sumas de subseries convergentes}\} = \mathcal{S}_f(u) \cup \mathcal{S}_i(u)$$

Puede ser $\mathcal{S}_f \cap \mathcal{S}_i \neq \varnothing$. Por Lévy-Steinitz, $\mathcal{S}_i$ es unión de subespacios afines:

$$\mathcal{S}_i(u) = \bigcup_{\substack{\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ \text{inyectiva}}} \mathcal{S}_r(u^\sigma)$$

Esto no es decir mucho: ¡los puntos son subespacios afines!

Ejemplos de conjuntos de sumas

- $\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots : \mathcal{S}_i = \varnothing, \mathcal{S} = \mathcal{S}_f = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\sum (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots : \mathcal{S}_i = \varnothing, \mathcal{S} = \mathcal{S}_f = \mathbb{Z}$.
- La serie armónica: $\mathcal{S} = [0, \infty)$; todo $x > 0$ es una «fracción egipcia» infinita

$$x = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots$$

- En general $\mathcal{S} = [0, \infty)$ si $\sum u(n)$ es divergente con $u \geq 0$ y $\lim u = 0$.
- La serie armónica alternante: $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. Es más interesante el T. de Pringsheim.
- En general $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ si tanto la parte positiva y la parte negativa de $\sum u$ son divergentes y $\lim u = 0$.

Ejemplos de conjuntos de sumas (II)

- $\sum 2^{-n}$: $\mathcal{S} = [0,1]$, siendo $\mathcal{S}_f$ los $x \in [0,1]$ con representación binaria finita (racionales $k/2^n$) y $\mathcal{S}_i$ los de representación binaria infinita.
- $\sum 2 \cdot 3^{-n}$: $\mathcal{S}$ consta de los $x \in [0,1]$ cuya representación ternaria formada sólo por los dígitos 0 y 2 (sin el 1). Es el conjunto de Cantor, ejemplo de fractal.

Como las sumas infinitas son límites de sumas finitas, es trivial que

$$\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S} \subseteq \overline{\mathcal{S}_f}$$

(cierre topológico) luego $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}_f}$ si $\mathcal{S}$ es cerrado. En general no lo es, aunque si en muchos casos particulares, como los anteriores.

Un ejemplo bidimensional con conjunto de sumas no cerrado

$\sum (2^{-n}, 1)$: $\mathcal{S}_i = \varnothing$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_f$ consta de los pares (x, ν) donde x tiene representación binaria finita con ν dígitos igual a 1. Se tiene $\overline{\mathcal{S}_f} = \mathcal{S}_f \sqcup (0 \times \mathbb{N})$.

Ejemplos de conjuntos de sumas (III)

Un conjunto de sumas unidimensional no cerrado

$\sum_{n=2}^{\infty}(1+n^{-1})$ tiene $\mathcal{S}_i = \varnothing$ y $\mathcal{S} = \mathcal{S}_f$. Claramente $1 \in \overline{\mathcal{S}_f}$ pero $1 \notin \mathcal{S}_f$.

Las sumas finitas $\mathcal{S}_f$ en este ejemplo son de la forma

$$\nu + \underbrace{\frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_\nu}}_{\nu}, \quad 2 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu, \quad \nu \geq 0$$

¿Qué naturales ν pertenecen á $\mathcal{S}_f$? Por ejemplo

$$4 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \in \mathcal{S}_f$$

$$12 = 11 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{105} + \frac{1}{135}}_{11} \in \mathcal{S}_f$$

De hecho todo $\nu \geq 4$ está en $\mathcal{S}_f$, pero $1, 2, 3 \notin \mathcal{S}_f$.

Estructura general del conjunto de sumas

Se pueden filtrar las sumas separando los primeros ν términos, considerando:

- subseries de $u(1) + \cdots + u(\nu)$, que denotamos por $\mathcal{S}_\nu$:

$$\mathcal{S}_\nu(u) = \left\{ \sum_{n \in F} u(n) : F \subseteq \{1, 2, \ldots, \nu\} \right\}, \qquad \mathcal{S}_f(u) = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{S}_\nu(u)$$

- subseries de $u(\nu+1) + u(\nu+2) + \cdots$, que denotamos por $\mathcal{S}_\nu^*$:

$$\mathcal{S}_\nu^*(u) = \left\{ \sum_{n=1}^{\mu} u(\sigma(n)) : \sigma : \mathbb{N}_\mu \to \{\nu+1, \nu+2, \ldots\} \text{ inyectiva} \right\}$$

Claramente $\#\mathcal{S}_\nu \leq 2^\nu$. Los conjuntos $\mathcal{S}_\nu$ son los que podemos representar gráficamente dados u y ν. Esto será útil en los casos cuando $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}_f}$.

Estructura general del conjunto de sumas (II)

Como separar un número finito de términos no afecta la convergencia, se tiene:

Propiedad de replicación

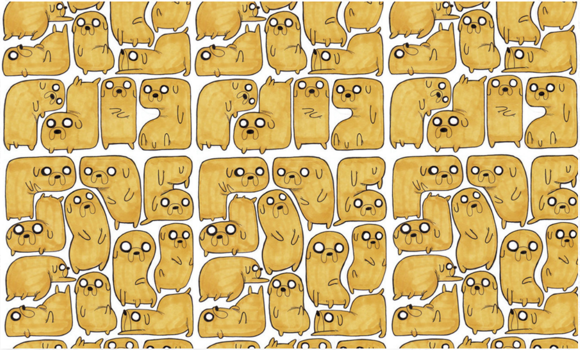
$$\mathcal{S} = \bigcup_{f \in \mathcal{S}_\nu} (f + \mathcal{S}_\nu^*)$$

O sea, $\mathcal{S}$ consta de copias trasladadas de $\mathcal{S}_\nu^*$, no necesariamente disjuntas.

La palabra «replicación» sugiere que $\mathcal{S}_\nu^*$ es semejante al total $\mathcal{S}$, aunque en general esto no es así salvo en determinados casos.

Estas ideas sugieren una posible estructura fractal en casos no triviales.

Replicación



La «fractalidad» suele involucrar la replicación a distintas escalas

El caso absolutamente convergente

Las series absolutamente convergentes son «aburridas» en cuanto a sumas reordenadas: $\mathcal{S}_r(u) = \{\Sigma u\}$, pero el conjunto total de sumas $\mathcal{S}(u)$ es interesante.

Como $\sum u$ es absolutamente convergente, cada $I \subseteq \mathbb{N}$ da lugar a una suma

$$\sigma_u(I) = \sum_{n \in I} u(n),$$

bien definida independiente del orden en I. La aplicación $\sigma_u : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ es una medida (real) sobre $\mathbb{N}$. El conjunto de sumas $\mathcal{S}$ es la imagen de σ_u.

Proposición (Morán 1989)

El conjunto de sumas de una serie absolutamente convergente es compacto.

En particular, $\mathcal{S}$ es cerrado, luego $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}_f}$ y podemos dibujar $\mathcal{S}$ por aproximación.

El caso absolutamente convergente (II)

Demostración: $\wp(\mathbb{N})$ corresponde al espacio $B = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones binarias $\beta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mediante $\beta(n) = 1 \iff n \in I$. Con la topología producto de la discreta en $\{0,1\}$, B es compacto, y metrizable mediante

$$d(\beta,\beta') = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = \beta' \\ 2^{-m} & \text{si } m \text{ es el primer «bit» en el cual difieren} \end{cases}$$

La medida σ_u corresponde a la aplicación

$$\sigma_u : B \to \mathbb{R}, \quad \sigma_u(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n)u(n)$$

σ_u es continua:

$$d(\beta,\beta') < 2^{-m} \implies \left|\sigma_u(\beta) - \sigma_u(\beta')\right| \le \sum_{n>m} |u(n)| = R_m \to 0$$

Como $\mathcal{S}(u) = \sigma_u(B)$, se concluye que es compacto. ∎

Teorema (Morán 1989)

Sea $\sum u$ una serie en $\mathbb{R}^d$ absolutamente convergente y $R_m = \sum_{n>m} |u(n)|$. Si $\liminf 2^n R_n^d = 0$ entonces $\mathcal{S}(u)$ tiene el cardinal del continuo y medida de Lebesgue d-dimensional nula.

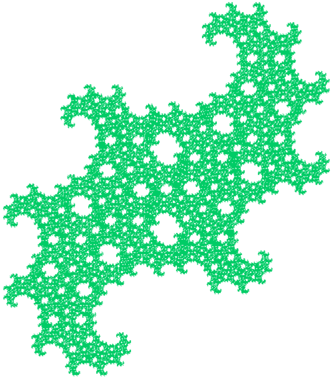
En este caso decimos que la serie es «fractal». Ver [3].

Teorema (Morán 1989)

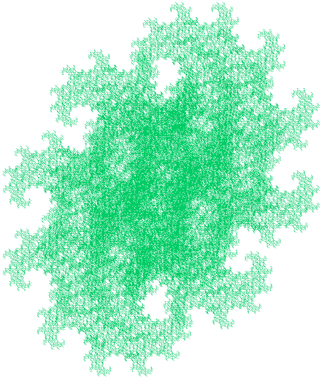
Una serie de potencias compleja $f(z) = \sum_n c_n (z-a)^n$ no polinomial y con radio de convergencia $\rho > 0$, es fractal para $0 < |z-a| < \rho/2$. Si $\rho \leq 1$, es fractal para $0 < |z-a| < \sqrt{\rho/2}$ exceptuando a los z pertenecientes a un número finito de rectas que pasan por a.

Morán obtuvo estimaciones y fórmulas para la dimensión de Hausdorff de $\mathcal{S}$.
También hay resultados análogos para productos infinitos.

Galería de sumas fractales (I): binomiales (Morán)

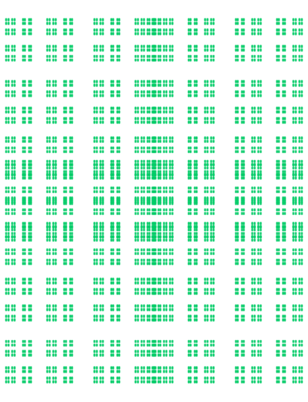


$$(1-z)^{-1} \quad a=0 \quad z=0.7\,e^{\frac{i\pi}{6}}$$

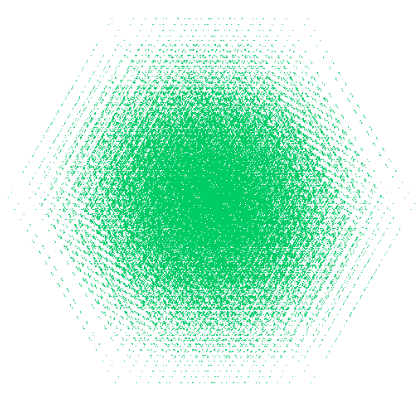


$$(1+z)^{-2} \quad a=0 \quad z=0.66\,e^{\frac{i\pi}{6}}$$

Galería de sumas fractales (II): binomiales (Morán)

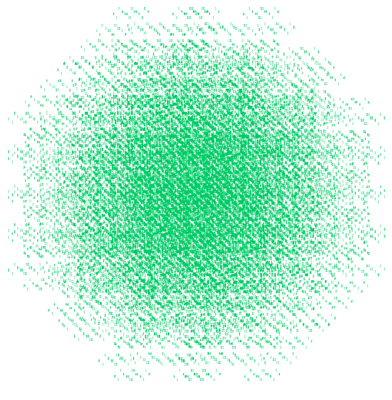


$(1+z)^{-3} \quad a=0 \quad z=0.5\,i$

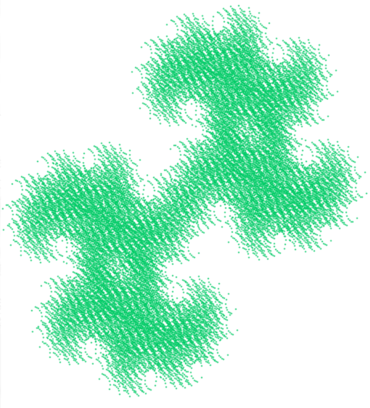


$(1-z)^{-5} \quad a=0 \quad z=0.7\,e^{\frac{i\pi}{3}}$

Galería de sumas fractales (III)

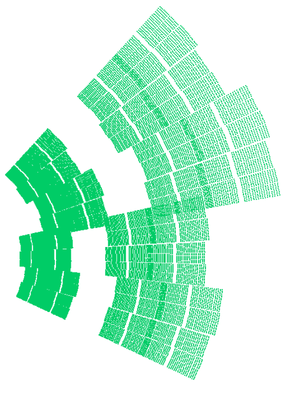


$$e^z = \sum_n \frac{z^n}{n!} \quad z = 10\, e^{\frac{i\pi}{4}}$$

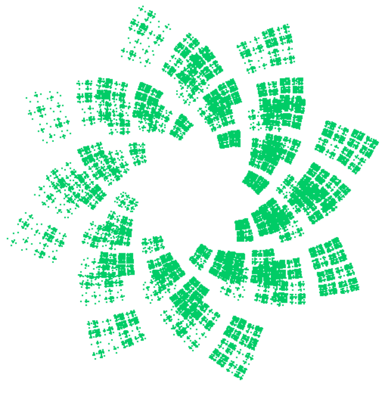


$$\sum_n \frac{e^{ik \log n}}{n^s} \quad k = 3.6 \quad s = 2.$$

Galería de productos fractales (I): Morán



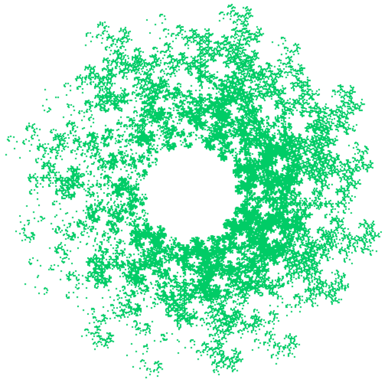
$$\prod_n (1+z^n) \quad z = 0.7\,i$$



$$\prod_n \left(e^{\pi i/4} + z^n\right) \quad z = 2i/3$$

Geometría de las subseries

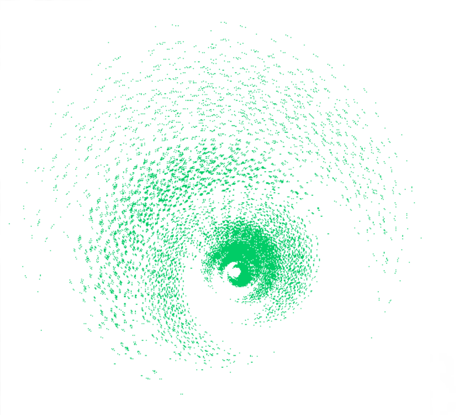
Galería de productos fractales (II)



$$\prod_n \left(e^{\pi i/4} + z^n\right) \quad z = 0.7\, e^{\pi i/4}$$

$$\prod_n \left(1 + \frac{e^{in}}{n^{1.3}}\right)$$

Galería de productos fractales (III)



$$\prod_n \left(1 + 6i\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \quad z = 0.7\, e^{\pi i/4}$$

$$\prod_n \left(1 + 6i\,\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}\right)$$

Sección 3

Series de potencias

El radio de convergencia

Consideremos una serie de potencias complejas

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

sin pérdida de generalidad, centrada en el origen (serie de MacLaurin).

Sabemos que dichas series tienen un radio de convergencia

$$\rho = \frac{1}{\limsup_n |c_n|^{1/n}} \in [0, \infty]$$

que determina (sorpresa) su convergencia:

1. Si $|z| < \rho$, la serie converge absolutamente a una función analítica $f(z)$.
2. Si $|z| > \rho$, la serie es divergente, con término general que no tiende a cero.
3. Si $|z| = \rho$, puede ser convergente o divergente.

El comportamiento en la frontera

$|z| = \rho$

Qué subconjuntos pueden ser los conjuntos de convegencia de una serie de potencias en el borde de su disco de convergencia?

Es decir, determinar los $S \subseteq \{|z| = \rho\}$ tales que para alguna serie de potencias $\sum_n c_n z^n$ de radio ρ, la serie converge en un z con $|z| = \rho$ si y sólo si $z \in S$.

No sabemos la respuesta. Los mejores resultados datan de 1950. S debe ser un $F_{\sigma\delta}$. No todo $F_{\sigma\delta}$ es de convergencia. Todo F_σ sí lo es. Hay un G_δ que no lo es.

- F_σ : unión numerable de cerrados.
- G_δ: intersección numerable de abiertos.
- $F_{\sigma\delta}$: intersección numerable de F_σ.

Series de potencias

Los ceros de las series truncadas

Si $f(z)$ es analítica en un entorno de 0, asociamos a f su serie de MacLaurin,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

y escribimos $\rho(f)$ para su radio de convergencia.

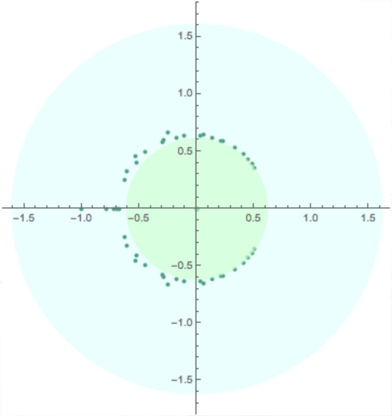
Para cada n, podemos considerar la serie truncada en grado n,

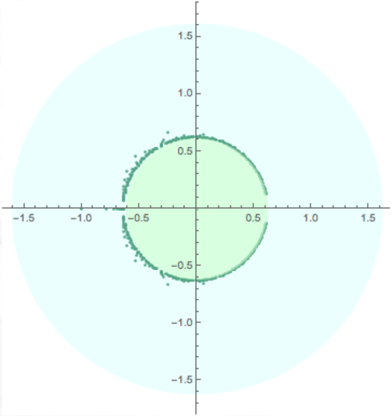
$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

$f_n(z)$ es un polinomio complejo, por tanto tiene n ceros (con multiplicidad).

¿Qué hacen los ceros de las series truncadas mientras éstas convergen/divergen?

Imágenes de los ceros de series truncadas (I)

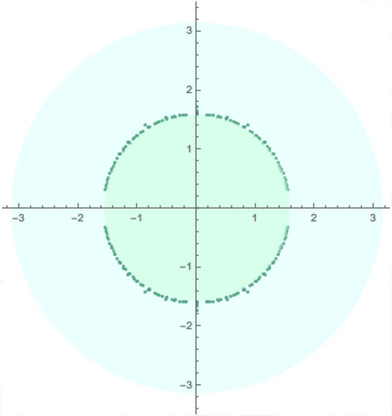




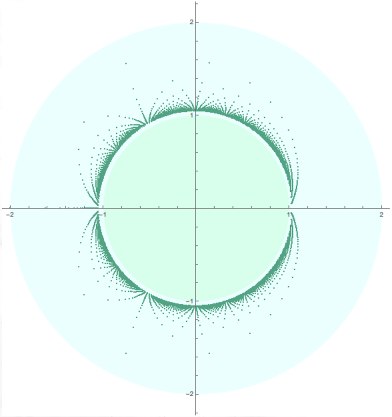
Ceros de las sumas parciales de la «serie Fibonacci» $z/(1-z-z^2)$ ($n = 10$)

Ceros de las sumas parciales de la «serie Fibonacci» ($n = 30$)

Imágenes de los ceros de series truncadas (II)

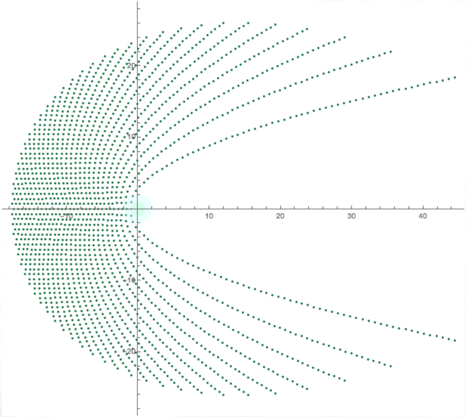


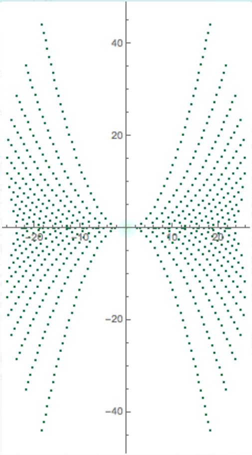
Ceros de sumas parciales de la serie de la tangente ($n = 30$)



Ceros de sumas parciales de la serie de $-\operatorname{Log}(1 - z)$ ($n = 100$)

Imágenes de los ceros de series truncadas (III)





Ceros de las sumas parciales de la serie de MacLaurin de $\exp(z)$ $(n = 60)$

Ceros de las sumas parciales de la serie de MacLaurin de $\operatorname{sen}(z)$ $(n = 60)$

Los Teoremas de Jentzsch y Erdös

Conjunto de Jentzsch

Sea $f(z)$ analítica en 0, con serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. El conjunto de Jentzsch $J(f)$ es el conjunto de puntos de acumulación de los ceros de las sumas parciales.

Teorema de Jentzsch

Si f es analítica en 0 con $0 < \rho(f) < \infty$, entonces $\{|z| = \rho\} \subseteq J(f)$.

Teorema de Szegö

Si f es analítica en 0 con $0 < \rho(f) < \infty$, los argumentos de los ceros de las sumas parciales están equidistribuidos: si $J_n(f)$ es el conjunto de ceros de f_n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{z \in J_n(f) : \alpha \leq \arg z \leq \beta\} = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \qquad (\alpha < \beta < \alpha + 2\pi)$$

El (posible) Teorema de Qian

(posible) Teorema de Qian (1995)

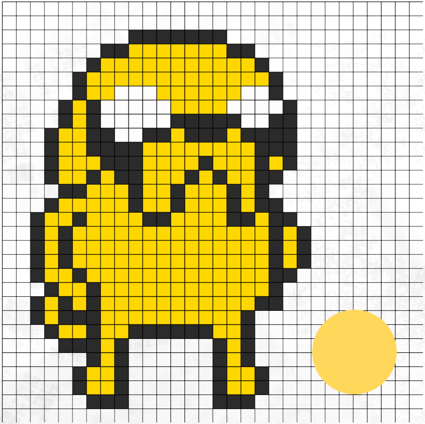
Sea $0 < \rho < \infty$. Dados:

- Un subconjunto cerrado C de $|z| \geq \rho$ que contiene al borde $|z| = \rho$.
- Un subconjunto finito F de $|z| < \rho$.

Entonces existe una función analítica f en 0 con radio de convergencia ρ tal que

$$J(f) = C \cup F$$

Un posible conjunto de Jentzsch



¿Cualquier conjunto cerrado es posible como $J(f)$ fuera del disco de convergencia?

Sección 4

Métodos de sumación

La serie de Grandi

Consideremos la serie de término general $a(n) = (-1)^{n-1}$,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Sus sumas parciales $A(n) = a(1) + \cdots + a(n)$ son

$$A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

La media de 0 y de 1 es $\frac{1}{2}$. Por tanto es razonable pensar que

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}$$

Pero, ¿en qué sentido han de interpretarse este tipo de razonamientos?

Para la serie de Grandi, ocurre que:

- Las sumas parciales $A(n)$ no tienen límite (alternan entre 0 y 1).
- Las medias aritméticas sucesivas de $A(n)$ sí tienen límite (1/2):

$$\frac{A(1)+A(2)+\cdots+A(n)}{n} \sim \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

Sumabilidad de Cesàro

Si $\sum a(n)$ es tal que las medias de sus sumas parciales $A(n)$ tienen límite A, decimos que $\sum a(n)$ es Cesàro sumable al valor A, escrito como C–$\sum a = A$.

Por ejemplo, la sumabilidad de Cesàro de la serie de Grandi se denota por:

$$\text{C–}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$$

Portada del album «Ænima» de la banda de metal alternativo **Tool**, con la canción «Cesàro summability»

Método de Abel

Sigamos con la serie de Grandi $1-1+1-1+\cdots$. Podemos considerar la serie de potencias (complejas) formada a partir de los términos de la serie:

$$1-z+z^2-z^3+\cdots=\frac{1}{1+z} \quad \text{si } |z|<1$$

Entonces es razonable pensar que «haciendo $z=1$»

$$1-1+1-1+\cdots \stackrel{?}{=} \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

El mismo resultado que antes pero con una idea completamente distinta!

- Dada una sucesión $a(n) : n \geq 0$, se le asocia la serie de potencias

$$f(z)=a(0)+a(1)z+a(2)z^2+\cdots+a(n)z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n$$

que satisface de modo formal $\sum_n a(n)=a(0)+a(1)+\cdots=f(1)$.

Método de Abel (II)

- Supongamos que la serie $\sum_n a(n)z^n$ converge para $|z| < 1$. Esto ocurre si por ejemplo $a(n)$ está acotada.
- Entonces la suma es una función $f(z)$ analítica para $|z| < 1$.

Sumabilidad de Abel

Si $\sum_n a(n)z^n$ converge en $|z| < 1$ á $f(z)$, que prolonga á $z = 1$, decimos que la serie $\sum_n a(n)$ es Abel sumable al valor $f(1)$, escrito como A–$\sum a = f(1)$.

Por ejemplo, la sumabilidad de Abel de la serie de Grandi se denota por:

$$\text{A–}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$$

Sumabilidad de Dirichlet

Dada la sucesión $a(n)$ estudiamos la serie de Dirichlet asociada

$$D(a,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$$

Este tipo de series define funciones analíticas en semiplanos $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Si prolonga á $s=0$ decimos que $\sum_n a(n)$ es Dirichlet sumable al valor $D(a,0)$.

Para la serie $1-1+1-1\cdots$ se obtiene la función eta de Dirichlet

$$\eta(s)=1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\cdots$$

$\eta(s)$ prolonga a una función entera con (sorpresa, sorpresa...) $\eta(0)=1/2$.

Zeta regularización

Dada una sucesión $a(n)$ positiva, estudiamos la función zeta asociada

$$Z(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a(n)^s}$$

Si $a(n) \geq cn^{\alpha}$ con c constante y $\alpha > 0$, la serie define una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} s > \alpha^{-1}$. Si $Z(a, s)$ prolonga á $s = -1$, decimos que $Z(a, -1)$ es la suma zeta regularizada de la serie $\sum a(n)$.

La zeta regularización se utiliza con frecuencia en la Física.

Como ejemplo ya no nos vale la serie de Grandi pues no crece polinomialmente, pero hay ejemplos mucho más interesantes de la Teoría de Números.

Métodos de sumación generales

Un método de sumación es un operador Σ definido sobre una subcolección de series que incluye a las convergentes en el sentido habitual, y con las propiedades

1. Regularidad: si la serie original $\sum a$ ya es convergente en el sentido habitual, al número A, entonces también $\Sigma a = A$.
2. Linealidad: $\Sigma(a+b) = \Sigma a + \Sigma b$, $\Sigma(ka) = k\Sigma a$ para $k \in \mathbb{K}$.
3. Separabilidad: Si separamos el primer término $a(1)$ del resto, quedando la serie $\sum a^* = a(2) + a(3) + a(4) + \cdots$, entonces $\Sigma a = a(1) + \Sigma a^*$.

Con estos axiomas ya se puede calcular el valor de muchas series. Por ejemplo, la serie de Grandi $\sum a(n) = \sum(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$:

- Por separabilidad, $\Sigma a = 1 + \Sigma a^*$, con $\sum a^* = -1 + 1 - 1 = \sum(-a)$.
- Por linealidad, $\Sigma a = 1 - \Sigma a$, luego $\Sigma a = 1/2$.

Sección 5

Euler, Riemann y la función zeta

La función zeta de Riemann

La serie $a(n) = n$ tiene función zeta asociada la función zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

La serie converge para $\operatorname{Re} s > 1$, pero $\zeta(s)$ prolonga analíticamente a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con un único polo simple en $s = 1$ de residuo 1:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \text{función entera}$$

En particular, obtenemos la suma zeta regularizada de los naturales:

$$\text{Z-}\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots \overset{\text{Z}}{=} \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Euler, $\zeta(-k)$ y los polilogaritmos (I)

Euler (1749) es el primero en dar sentido a $\zeta(-1), \zeta(-2), \ldots$. Utiliza la familia de polilogaritmos, dada por

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}, \quad \text{en particular} \quad \mathrm{Li}_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

Los polilogaritmos satisfacen la ecuación diferencial

$$z\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_s(z) = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{s-1}} = \mathrm{Li}_{s-1}(z)$$

Por inducción vemos entonces que $\mathrm{Li}_{-k}(z) : k \in \mathbb{N}$ es una función racional:

$$\mathrm{Li}_{-1}(z) = z\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_0(z) = z\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Euler, $\zeta(-k)$ y los polilogaritmos (II)

Los primeros polilogaritmos $-\operatorname{Li}_{-k}(z)$ son

$$\operatorname{Li}_0(z) = \frac{z}{1-z} \qquad \operatorname{Li}_{-1}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$\operatorname{Li}_{-2}(z) = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3} \qquad \operatorname{Li}_{-3}(z) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4}$$

Esto prolonga $\operatorname{Li}_{-k}(s)$. Los numeradores $A_k(z)$ se llaman polinomios Eulerianos (no «de Euler», esos son otros). Los denominadores son $(1-z)^{k+1}$:

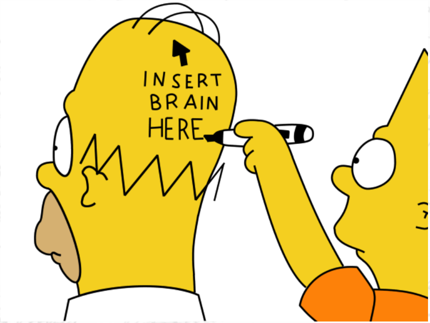
$$\operatorname{Li}_{-k}(z) = \frac{A_k(z)}{(1-z)^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \quad A_k(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

Esto significa que sustituyendo $z = 1$ no obtenemos un valor finito:

$$\zeta(-k) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^{-k}} \overset{?}{=} \operatorname{Li}_{-k}(1) = \infty$$

Homer

Homer



Hay que pensar más

Euler, $\zeta(-k)$ y los polilogaritmos (III)

No podemos sustituir $z = 1$, pero sí $z = -1$, aventurando que

$$\eta(-k) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^k \stackrel{?}{=} -\operatorname{Li}_{-k}(-1) = -\frac{A_k(-1)}{2^{k+1}} \in \mathbb{Q}.$$

Por ejemplo, Euler escribe, poniendo $k = 1$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

y con $k = 2$ tenemos

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0$$

y con $k = 3$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots = -\frac{1}{8}$$

Euler, $\zeta(-k)$ y los polilogaritmos (IV)

Euler no renuncia a $\zeta(-k)$. Partiendo de

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s}\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots\right) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots$$

(los términos pares), los impares son la otra mitad de la serie:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

luego restando queda

$$\eta(s) = \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$$

y ahora ya se puede asignar un valor finito racional

$$\zeta(-k) = -\frac{\eta(-k)}{2^{k+1}-1} \in \mathbb{Q} = \frac{A_k(-1)}{2^{k+1}(2^{k+1}-1)} \in \mathbb{Q}$$

Homer (II)

Homer contento

Euler, $\zeta(-k)$ y los polilogaritmos (V)

Por ejemplo, con $k = 1$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots \overset{\mathsf{z}}{=} \zeta(-1) = \frac{A_1(-1)}{2^2(2^2-1)} = -\frac{1}{12}$$

Los valores de $\zeta(-k)$

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

donde $\{B_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ son los números de Bernoulli.

Como $z + 1 \mid A_k(z)$ si k es par (o porque $B_3 = B_5 = \cdots = 0$)

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = 0.$$

Estos son los llamados ceros triviales de $\zeta(s)$.

Euler, $\zeta(-k)$ y los polilogaritmos (VI)

Euler también descubrió los valores de $\zeta(s)$ en los enteros pares positivos

Los valores de $\zeta(2k)$

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

En [2] damos una demostración que se puede explicar en Cálculo de primero.

Al comparar $\zeta(2k)$ con $\zeta(1-2k)$ se deduce la ecuación funcional para enteros

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s) \quad (s \in \mathbb{Z})$$

posteriormente enunciada para $s \in \mathbb{C}$ por Riemann en su famoso trabajo *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (1859) donde la simetría $s \mapsto 1-s$ le sugiere la Conjetura ó Hipótesis de Riemann (RH).

La función de Möbius

$\mu(n)$

La función de Möbius está definida por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ con } p_j \text{ primos distintos,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es divisible por algún } p^2,\ p \text{ primo.} \end{cases}$$

RH

RH es equivalente al siguiente orden de magnitud de divergencia:

$$M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \le x} \mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

para todo $\varepsilon > 0$.

La función de Möbius (II)

Teorema de los Números Primos

Sea $\pi(x)$ el número de primos $p \leq x$. Entonces

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)} \qquad (x \to \infty)$$

El TNP es equivalente a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

que viene a decir que $\zeta(s)$ no tiene ceros con $\operatorname{Re} s = 1$.

Sección 6

Aproximación Diofántica

Consideremos la serie de Dirichlet de la tangente:

$$D(\mathrm{tg}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{tg}(n)}{n^s}$$

¿Para que valores (reales) de s es convergente? A día de hoy, no lo sabemos [5].

Como $\mathrm{tg}(x) = \pm\infty$ cuando $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, el término general $\mathrm{tg}(n)$ «se hará grande» cuando $n \in \mathbb{N}$ sea tal que para algún $k \in \mathbb{Z}$,

$$\pi \approx \frac{2n}{2k+1} \quad \text{es decir} \quad \frac{1}{\pi} \approx \frac{2k+1}{2n}$$

El problema de cuánto se puede acercar un número racional a uno irracional se trata en la teoría de la Aproximación Diofántica.

Medida de irracionalidad

Sea $x \in \mathbb{R}$. La medida de irracionalidad de x se define como el ínfimo $\mu(x)$ de los exponentes $\alpha > 0$ tales que para alguna constante $c(\alpha) > 0$ se tiene

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^{\alpha}}$$

para todo par $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Se pone $\mu(x) = \infty$ si no hay tales α.

1. $\mu(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ (trivial)
2. $\mu(x) = 2$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$
3. $\mu(x) = 2$ para x irracional algebraico (Teorema de Roth: medalla Fields)
4. $\mu(x) \geq 2$ si x es trascendente.

Todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tiene un único desarrollo en fracción continua simple

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} \stackrel{\text{def}}{=} [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$$

con coeficientes $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_n \in \mathbb{N}$ para $n \geq 1$. Las fracciones truncadas tienen valores racionales p_n/q_n, que se llaman los convergentes de x.

Se puede demostrar que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

de lo cual se deduce que $\mu(x) \geq 2$ para x irracional.

Fracciones continuas (II)

Sondow (2004)

Si x es irracional con fracción continua simple $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, entonces

$$\mu(x) = 1 + \limsup_n \frac{\log(q_{n+1})}{\log(q_n)} = 2 + \limsup_n \frac{\log(a_{n+1})}{\log(q_n)}$$

En particular esto permite ver fácilmente que

$$\mu(x^{-1}) = \mu(x)$$

Dos ejemplos famosos de fracciones continuas simples conocidas son

- La razón áurea $\varphi \overset{\text{def}}{=} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$
- $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$ (Euler)

Esto permite deducir que $\mu(\varphi) = 2$ (sin el T. de Roth) y $\mu(e) = 2$.

La medida de irracionalidad de π y la serie tangente

Lema sencillo

Sea $|x| < \pi$ con $\left|\frac{\pi}{2} - x\right| \geq \delta$. Entonces $|x| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ y

$$|\mathrm{tg}(x)| \leq \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \mathrm{ctg}(\delta) \asymp \delta^{-1} \quad (\delta \to 0^+)$$

donde $f \asymp g \iff Af \leq g \leq Bf$ para constantes $A, B > 0$.

Dado $s > \mu(\pi) = \mu(\pi^{-1})$, eligiendo $s > r > \mu(\pi)$, tenemos

$$\left|\frac{1}{\pi} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^r} \qquad \forall\,(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

usando c como sinónimo de «una constante» (de valor cambiante). En particular

$$\left|\frac{1}{\pi} - \frac{2k+1}{2n}\right| \geq \frac{c}{n^r} \qquad \forall\,(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

La medida de irracionalidad de π y la serie tangente (II)

Multiplicando por πn ambos lados en la desigualdad anterior, queda

$$\left|\frac{\pi}{2} - (n - k\pi)\right| \geq \frac{c}{n^{r-1}}$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, escogiendo $k \in \mathbb{Z} : k\pi < n < (k+1)\pi$, por el Lema sencillo,

$$|\mathrm{tg}(n)| = |\mathrm{tg}(n - k\pi)| \leq cn^{r-1}$$

con lo cual si $s > \mu(\pi)$,

$$\left|\frac{\mathrm{tg}(n)}{n^s}\right| \leq \frac{c}{n^{s-r+1}} \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{tg}(n)}{n^s}\right| \leq c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s-r+1}} < \infty$$

$\mu(\pi)$

Todo depende de conocer $\mu(\pi)$. A día de hoy, sabemos que $\mu(\pi) \leq 7.6063$ (Salikhov (2008)). Por tanto $\sum_n \mathrm{tg}(n)/n^8$ converge, por ejemplo.

La medida de irracionalidad de π y la serie tangente (III)

En la otra dirección, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(n)}{n}$ es divergente. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(n)}{n^2}$ es un misterio.

Si $\operatorname{Im} z \neq 0$, $|\operatorname{tg}(nz)|$ está acotada, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(nz)}{n^s}$ converge si $\operatorname{Re} s > 1$.

Alekseyev (2011)

Si la llamada «serie de Flint Hills»

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\csc^2(n)}{n^3}$$

es convergente, entonces $\mu(\pi) \leq 2.5$.

¡Gracias por la atención prestada!

Bibliografía

[1] C. C. Cowen, K. R. Davidson, R. P. Kaufman, *Rearranging the Alternating Harmonic Series,* Am. Math. Monthly **87 (10)** (1980), 817–819.

[2] O. Ciaurri, L. Navas, F.J. Ruiz Blasco, J.L. Varona, *A simple computation of zeta(2k),* Amer. Math. Monthly **122**, (2015), 444–451.

[3] M. Morán, *Fractal series,* Mathematika **36 (2)** (1989), 334–348.

[4] P. Rosenthal, *The Remarkable Theorem of Levy and Steinitz,* Am. Math. Monthly **94 (4)** (1987), 342–351.

[5] I. Rosenholtz, *Tangent Sequences, World Records, π, and the Meaning of Life: Some Applications of Number Theory to Calculus,* Mathematics Magazine **72 (5)** (1999), 367–376.

Código *Mathematica* para sumas fractales

```
colorBase = RGBColor[0, 0.8, 0.4];
estilo = {
        PlotStyle -> {colorBase, PointSize[0.002]},
        AspectRatio -> Automatic,
        Axes -> None,
        PlotRange -> All,
        ImageSize -> Scaled[1],
        Background -> White
};

sumaParcial[funcion_, listaIndices_] := Plus@@(funcion/@listaIndices);
sumasParciales[funcion_, listaSubconjuntos_] :=
        sumaParcial[funcion,#]&/@listaSubconjuntos;
sumasHasta[n_, funcion_] := Prepend[sumasParciales[funcion, Subsets[Range[n]] // Rest],
        ConstantArray[0, Length[funcion[#]]]];
sumasComplejasHasta[n_, funcion_] := sumasParciales[funcion, Subsets[Range[n]]];
plotSumas[funcion_, nivel_, estiloPropio_: estilo] :=
        ListPlot[sumasHasta[nivel, funcion], estiloPropio~Join~estilo];
plotSumasComplejas[funcion_, nivel_, estiloPropio_: estilo] :=
        ListPlot[sumasComplejasHasta[nivel, funcion] // ReIm,
        estiloPropio~Join~estilo];

(* ejemplo de uso *)

plotSumasComplejas[Function[n, polar[0.7, 30]^n], 17,
        {PlotStyle -> {colorBase, PointSize[0.001]}}]
```

Código *Mathematica* para productos fractales

```
productoParcial[funcion_, listaIndices_] := Times @@ (funcion /@ listaIndices);
productosParciales[funcion_, listaSubconjuntos_] :=
        productoParcial[funcion, #] & /@ listaSubconjuntos;
productosHasta[n_, funcion_] :=
        Prepend[productosParciales[funcion, Subsets[Range[n]] // Rest],
        ConstantArray[1, Length[funcion[#]]]];
productosComplejosHasta[n_, funcion_] :=
        productosParciales[funcion, Subsets[Range[n]]];
plotProductos[funcion_, nivel_, estiloPropio_: estilo] :=
        ListPlot[productosHasta[nivel, funcion], estiloPropio~Join~estilo];
plotProductosComplejos[funcion_, nivel_, estiloPropio_: estilo] :=
        ListPlot[productosComplejosHasta[nivel, funcion] // ReIm,
        estiloPropio~Join~estilo];

polar[r_, grados_] := r Exp[2 Pi I grados/360];

(* ejemplo de uso *)

plotProductosComplejos[(1 + (0.7 I)^#) &, 15,
        {Axes -> False, PlotStyle -> {colorBase, PointSize[0.002]}}]
```

Código *Mathematica* para ceros de sumas parciales

```
ceros[f_] := Table[N[Root[f[z], k]], {k, 1, Max[0, Exponent[f[z], z]]}];
SetAttributes[ceros, Listable];
disco[radio_: 1, centro_: {0, 0}, color_: RGBColor[0.8, 1, 1], opac_: 0.6,
        opciones : OptionsPattern[Graphics]] :=
        Graphics[{opciones}~Join~{Opacity[opac, color], Disk[centro, radio]}];
cerosPlot[listaPolinomios_, opciones : OptionsPattern[ListPlot]] :=
        Module[{grado, listaCeros, tablaReImCeros},
        listaCeros = ceros[listaPolinomios] // Flatten;
        tablaReImCeros = Table[{Re[listaCeros[[j]]], Im[listaCeros[[j]]]},
                {j, 1, Length[listaCeros]}];
        ListPlot[tablaReImCeros, opciones, PlotStyle -> colorBase]
        ]
cerosDiscos[listaPolinomios_, listaDiscos_: {}, opciones : OptionsPattern[{ListPlot,
        Graphics}]] := Show[cerosPlot[listaPolinomios,
                Sequence @@ FilterRules[{opciones}, Options@ListPlot]],
                listaDiscos,
                Sequence @@ FilterRules[{opciones}, Options@Graphics],
                AspectRatio -> Automatic,
                PlotRange -> Automatic
                ]
sumpar[f_, n_] := Function[z, Series[f[z], {z, 0, n}] // Normal]

(* ejemplo de uso *)

fib[n_] := Sum[Fibonacci[k] #^k, {k, 0, n}] &;
cerosDiscos[Table[fib[k], {k, 0, 10}], {
disco[GoldenRatio, {0, 0}, RGBColor[0.8, 1, 1], 0.4],
disco[1/GoldenRatio, {0, 0}, RGBColor[0.8, 1, 0.8], 0.6]
}, Background -> White]
```