

Un breve recorrido geométrico: desde la Geometría Euclídea hasta la Geometría Algebraica, pasando por la Geometría Projectiva.

Esteban Gómez González
Dpto. de Matemáticas
Universidad de Salamanca

XVI E.N.E.M. 2015



1 Introducción



- 1 Introducción
- 2 Orígenes de la Geometría. Euclides



- 1 Introducción
- 2 Orígenes de la Geometría. Euclides
- 3 Geometrías no euclídeas



- 1 Introducción
- 2 Orígenes de la Geometría. Euclides
- 3 Geometrías no euclídeas
- 4 Concepciones de la noción de Geometría



- 1 Introducción
- 2 Orígenes de la Geometría. Euclides
- 3 Geometrías no euclídeas
- 4 Concepciones de la noción de Geometría
- 5 Geometría Projectiva



- 1 Introducción
- 2 Orígenes de la Geometría. Euclides
- 3 Geometrías no euclídeas
- 4 Concepciones de la noción de Geometría
- 5 Geometría Proyectiva
- 6 Geometría Algebraica



¿Qué es la Geometría?



¿Qué es la Geometría?

*Alejaos de todas las curiosidades apasionantes.
Sobre todo no os dejéis embrujar por los diabólicos
atractivos de la geometría: nada hará tanto como
ellos para extinguir en vosotros el espíritu interior
de gracia y recogimiento.*

Fenelon. Cartas espirituales (teólogo católico del siglo XVII)



- Babilonia (siglo VIII a.C.), y Egipto (siglo IV a.C.)



- Babilonia (siglo VIII a.C.), y Egipto (siglo IV a.C.)
- Geometría = geo-tierra, metría-medida



- Babilonia (siglo VIII a.C.), y Egipto (siglo IV a.C.)
- Geometría = geo-tierra, metría-medida
- Grecia. La Geometría se convierte en ciencia. Geometría de Euclides (siglo III a.C.)



- Babilonia (siglo VIII a.C.), y Egipto (siglo IV a.C.)
- Geometría = geo-tierra, metría-medida
- Grecia. La Geometría se convierte en ciencia. Geometría de Euclides (siglo III a.C.)
- Presentación axiomática.



- Babilonia (siglo VIII a.C.), y Egipto (siglo IV a.C.)
- Geometría = geo-tierra, metría-medida
- Grecia. La Geometría se convierte en ciencia. Geometría de Euclides (siglo III a.C.)
- Presentación axiomática.
- *“Si axiomas arbitrariamente propuestos no se contradicen ni lo hacen tampoco sus consecuencias, son ciertos, y las cosas definidas por ellos existen. Estos son para mí los criterios de verdad y existencia”*. D. Hilbert



- Los *Elementos* de Euclides.



- Los *Elementos* de Euclides.

“La geometría, como toda entidad dotada de vida propia, tiene su código genético y una historia, y su porvenir es consecuencia de ambos”. (Pedro Abellanas)



- Los *Elementos* de Euclides.

“La geometría, como toda entidad dotada de vida propia, tiene su código genético y una historia, y su porvenir es consecuencia de ambos”. (Pedro Abellanas)

Los genes de la Geometría son los *Elementos* de Euclides y la historia de la Geometría es una espiral que ha retornado periódicamente a ellos.



- Los *Elementos* de Euclides.

“La geometría, como toda entidad dotada de vida propia, tiene su código genético y una historia, y su porvenir es consecuencia de ambos”. (Pedro Abellanas)

Los genes de la Geometría son los *Elementos* de Euclides y la historia de la Geometría es una espiral que ha retornado periódicamente a ellos.

- Son 13 libros y en el primero de ellos aparecen 23 definiciones, 5 axiomas y los 5 postulados famosos.



- DEFINICIONES



• DEFINICIONES

- Un punto es un objeto indivisible.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Una superficie es un objeto que sólo tiene longitud y anchura.
- Ángulo recto es aquel que se produce cuando el corte de dos rectas da lugar a dos ángulos iguales.
- Rectas paralelas son las que prolongadas indefinidamente no se cortan (definición 23).



• DEFINICIONES

- Un punto es un objeto indivisible.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Una superficie es un objeto que sólo tiene longitud y anchura.
- Ángulo recto es aquel que se produce cuando el corte de dos rectas da lugar a dos ángulos iguales.
- Rectas paralelas son las que prolongadas indefinidamente no se cortan (definición 23).

• AXIOMAS



• DEFINICIONES

- Un punto es un objeto indivisible.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Una superficie es un objeto que sólo tiene longitud y anchura.
- Ángulo recto es aquel que se produce cuando el corte de dos rectas da lugar a dos ángulos iguales.
- Rectas paralelas son las que prolongadas indefinidamente no se cortan (definición 23).

• AXIOMAS

- 1 Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
- 2 Si se añaden iguales a iguales, los todos son iguales.
- 3 Si se sustraen iguales a iguales, los restos son iguales.
- 4 Las cosas que coinciden una con la otra son iguales entre sí.
- 5 El todo es mayor que la parte.



- POSTULADOS



- POSTULADOS

- 1 Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.



• POSTULADOS

- 1 Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.
- 2 Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.



• POSTULADOS

- 1 Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.
- 2 Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.
- 3 Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.



• POSTULADOS

- ❶ Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.
- ❷ Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.
- ❸ Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.
- ❹ Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.



• POSTULADOS

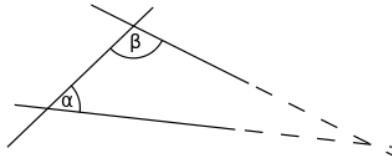
- ❶ Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.
- ❷ Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.
- ❸ Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.
- ❹ Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- ❺ Si una recta corta a otras dos, contenidas en un mismo plano, de modo que la suma de los ángulos interiores situados a un mismo lado es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas suficientemente, se cortan en el lado en que la suma es inferior a dos rectos.



• POSTULADOS

- ❶ Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.
- ❷ Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.
- ❸ Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.
- ❹ Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- ❺ Si una recta corta a otras dos, contenidas en un mismo plano, de modo que la suma de los ángulos interiores situados a un mismo lado es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas suficientemente, se cortan en el lado en que la suma es inferior a dos rectos.





$$\alpha + \beta \leq 180$$

V Postulado de Euclides



Geometrías no euclídeas

- 2.000 años de debate sobre el V postulado de Euclides.



Geometrías no euclídeas

- 2.000 años de debate sobre el V postulado de Euclides.
 - Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.



Geometrías no euclídeas

- 2.000 años de debate sobre el V postulado de Euclides.
 - Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.
 - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.



Geometrías no euclídeas

- 2.000 años de debate sobre el V postulado de Euclides.
 - Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.
 - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- Siglo XIX. Lobachesky y Bolyai.



Geometrías no euclídeas

- 2.000 años de debate sobre el V postulado de Euclides.
 - Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.
 - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- Siglo XIX. Lobachesky y Bolyai.
 - No se llega a ninguna contradicción al intentar probar por reducción al absurdo que el V postulado depende de los cuatro anteriores, es decir, que si se sustituye por el contrario, se ha de llegar a una contradicción, pero para sorpresa de Lobachesky, no fue así.



Geometrías no euclídeas

- 2.000 años de debate sobre el V postulado de Euclides.
 - Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.
 - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- Siglo XIX. Lobachesky y Bolyai.
 - No se llega a ninguna contradicción al intentar probar por reducción al absurdo que el V postulado depende de los cuatro anteriores, es decir, que si se sustituye por el contrario, se ha de llegar a una contradicción, pero para sorpresa de Lobachesky, no fue así.
 - Por tanto si quitamos o cambiamos el V postulado se obtienen geometrías coherentes deducidas de forma similar a la Geometría Euclídea.



- Estas nuevas geometrías presentan ciertas “paradojas” como, por ejemplo, que por un punto exterior a una recta no pasa una única recta paralela.



- Estas nuevas geometrías presentan ciertas “paradojas” como, por ejemplo, que **por un punto exterior a una recta no pasa una única recta paralela.**



- Estas nuevas geometrías presentan ciertas “paradojas” como, por ejemplo, que por un punto exterior a una recta no pasa una única recta paralela.
- Así surgen **las geometrías no euclídeas**.



- Estas nuevas geometrías presentan ciertas “paradojas” como, por ejemplo, que por un punto exterior a una recta no pasa una única recta paralela.
- Así surgen **las geometrías no euclídeas**.
- *“Las geometrías no euclídeas son el descubrimiento más sugestivo del siglo XIX”. D. Hilbert*



Las tres geometrías que surgen son:



Las tres geometrías que surgen son:

- La geometría **euclídea o parabólica**:



Las tres geometrías que surgen son:

- La geometría **euclídea o parabólica**: por un punto exterior a una recta pasa una única paralela, o equivalentemente, la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 2 rectos.



Las tres geometrías que surgen son:

- La geometría **euclídea o parabólica**: por un punto exterior a una recta pasa una única paralela, o equivalentemente, la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 2 rectos.
- La geometría **hiperbólica o de Lobachevsky**:



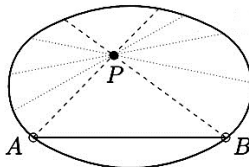
Las tres geometrías que surgen son:

- La geometría **euclídea o parabólica**: por un punto exterior a una recta pasa una única paralela, o equivalentemente, la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 2 rectos.
- La geometría **hiperbólica o de Lobachevsky**: por un punto exterior existen varias paralelas, o que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.



Las tres geometrías que surgen son:

- La geometría **euclídea o parabólica**: por un punto exterior a una recta pasa una única paralela, o equivalentemente, la suma de los ángulos interiores de un triángulo son 2 rectos.
- La geometría **hiperbólica o de Lobachevsky**: por un punto exterior existen varias paralelas, o que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Un modelo de esta geometría es el plano hiperbólico, que se puede “visualizar” como el interior de un disco donde las rectas son las cuerdas del disco.



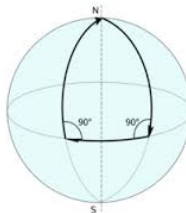
- La geometría **elíptica** o también atribuida a Riemann:



- La geometría **elíptica** o también atribuida a Riemann: por un punto exterior no pasa ninguna paralela, o que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.



- La geometría **elíptica** o también atribuida a Riemann: por un punto exterior no pasa ninguna paralela, o que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos. Un modelo de esta geometría es la superficie de la esfera, conocida como la esfera de Riemann, donde las rectas (geodésicas- “curva de distancia mínima entre dos puntos”) son los círculos máximos.



Concepciones de la noción de Geometría



Concepciones de la noción de Geometría

- **Geometría axiomática o sintética:** visualización de las figuras y construcción a partir de regla y compás.



Concepciones de la noción de Geometría

- **Geometría axiomática o sintética:** visualización de las figuras y construcción a partir de regla y compás.
- **Geometría analítica o cartesiana:** representación de las figuras geométricas mediante ecuaciones y realiza su estudio a partir de las propiedades algebraicas de su ecuación. (XVII)



Concepciones de la noción de Geometría

- **Geometría axiomática o sintética:** visualización de las figuras y construcción a partir de regla y compás.
- **Geometría analítica o cartesiana:** representación de las figuras geométricas mediante ecuaciones y realiza su estudio a partir de las propiedades algebraicas de su ecuación. (XVII)
 - Hasta el siglo XVIII inclusive se estudiaba únicamente la geometría del plano y del espacio por considerarse la geometría una idealización del comportamiento físico.



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,
 - La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa,



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,
 - La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa,
 - La geometría elíptica tiene curvatura positiva.



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,
 - La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa,
 - La geometría elíptica tiene curvatura positiva.
 - Las geometrías de curvatura no constante son aquellas geometrías que localmente son euclídeas, pero no globalmente.



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,
 - La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa,
 - La geometría elíptica tiene curvatura positiva.
 - Las geometrías de curvatura no constante son aquellas geometrías que localmente son euclídeas, pero no globalmente.
- **Geometría de invariantes:** el grupo de transformaciones que se admiten es el origen de la geometría (F. Klein, finales XIX)



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,
 - La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa,
 - La geometría elíptica tiene curvatura positiva.
 - Las geometrías de curvatura no constante son aquellas geometrías que localmente son euclídeas, pero no globalmente.
- **Geometría de invariantes:** el grupo de transformaciones que se admiten es el origen de la geometría (F. Klein, finales XIX)
 - Cierra el debate entre la geometría sintética y la analítica.



- **Geometría riemanniana:** inicia el estudio de dimensiones superiores. El peso de la geometría recae sobre la métrica de la que está dotada la variedad (geodésicas, curvatura) (XIX)
 - Las geometrías no euclídeas son las de curvatura constante:
 - La geometría euclídea tiene curvatura cero,
 - La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa,
 - La geometría elíptica tiene curvatura positiva.
 - Las geometrías de curvatura no constante son aquellas geometrías que localmente son euclídeas, pero no globalmente.
- **Geometría de invariantes:** el grupo de transformaciones que se admiten es el origen de la geometría (F. Klein, finales XIX)
 - Cierra el debate entre la geometría sintética y la analítica.
 - La **geometría proyectiva** incluye todas las geometrías y es la natural y primera para estudiar las diferentes geometrías como subgeometrías.



Introducción
Euclides
Geometrías no euclídeas
Concepciones de la noción de Geometría
Geometría Projectiva
Geometría Algebraica

Historia
Presentación algebraica
Axiomas

Geometría Projectiva



Geometría Projectiva

- Edad Media y Los *Elementos* de Euclides.



Geometría Projectiva

- Edad Media y Los *Elementos* de Euclides.



Geometría Projectiva

- Edad Media y Los *Elementos* de Euclides.
“En cuanto a escribir otro libro sobre geometría en la Edad Media, antes se les hubiera ocurrido componer otro Nuevo Testamento”. Augustus De Morgan (siglo XIX)



Geometría Projectiva

- Edad Media y Los *Elementos* de Euclides.
“En cuanto a escribir otro libro sobre geometría en la Edad Media, antes se les hubiera ocurrido componer otro Nuevo Testamento”. Augustus De Morgan (siglo XIX)
- La Geometría Projectiva tiene sus orígenes en la pintura y arquitectura del Renacimiento (Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, Guidobaldo del Monte, Rodrigo Gil de Hontañón).





Llanto sobre Cristo Muerto (1305)



Escuela de Atenas (1510)



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.
 - La Geometría Projectiva es un modelo de teoría que teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan “la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones”.



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.
 - La Geometría Projectiva es un modelo de teoría que teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan “la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones”.
 - *“Según Cayley, la Geometría Projectiva es toda la geometría”.*
(F. Klein)



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.
 - La Geometría Projectiva es un modelo de teoría que teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan “la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones”.
 - *“Según Cayley, la Geometría Projectiva es toda la geometría”.* (F. Klein)
 - *“En el lugar de las matemáticas hay muchas moradas, y de entre ellas, la más elegante es la Geometría Projectiva”.* (M. Kline)



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.
 - La Geometría Projectiva es un modelo de teoría que teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan “la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones”.
 - *“Según Cayley, la Geometría Projectiva es toda la geometría”.* (F. Klein)
 - *“En el lugar de las matemáticas hay muchas moradas, y de entre ellas, la más elegante es la Geometría Projectiva”.* (M. Kline)
- Siglo XVII - Desargues.



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.
 - La Geometría Projectiva es un modelo de teoría que teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan “la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones”.
 - *“Según Cayley, la Geometría Projectiva es toda la geometría”.* (F. Klein)
 - *“En el lugar de las matemáticas hay muchas moradas, y de entre ellas, la más elegante es la Geometría Projectiva”.* (M. Kline)
- Siglo XVII - Desargues.
- Siglo XIX - Poncelet (aparecen físicamente los puntos del infinito)



- La Geometría Projectiva estudia las propiedades de las figuras que se conservan por proyección.
 - La Geometría Projectiva es un modelo de teoría que teniendo sus orígenes en el mundo real, llega a un nivel de elaboración en el que se combinan “la perfección formal, la elegancia en el razonamiento y la riqueza de las intuiciones”.
 - *“Según Cayley, la Geometría Projectiva es toda la geometría”.* (F. Klein)
 - *“En el lugar de las matemáticas hay muchas moradas, y de entre ellas, la más elegante es la Geometría Projectiva”.* (M. Kline)
- Siglo XVII - Desargues.
- Siglo XIX - Poncelet (aparecen físicamente los puntos del infinito)
- Karl G. C. von Staudt (separa totalmente las nociones métricas de las proyectivas y el cuerpo base)



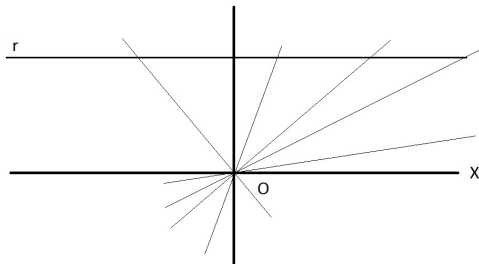
- La introducción de las ideas algebraicas en geometría proyectiva en el siglo XIX se deben a Augustus F. Möbius y J. Plücker (coordenadas homogéneas).



- La introducción de las ideas algebraicas en geometría proyectiva en el siglo XIX se deben a Augustus F. Möbius y J. Plücker (coordenadas homogéneas).
- Como consecuencia de la introducción del Álgebra Lineal por Cayley y Grassmann, a finales del siglo XIX, se hizo una presentación algebraica de los espacios proyectivos, que se basa en la idea de proyección.



- La introducción de las ideas algebraicas en geometría proyectiva en el siglo XIX se deben a Augustus F. Möbius y J. Plücker (coordenadas homogéneas).
- Como consecuencia de la introducción del Álgebra Lineal por Cayley y Grassmann, a finales del siglo XIX, se hizo una presentación algebraica de los espacios proyectivos, que se basa en la idea de proyección.



Sea E un k -espacio vectorial de dimensión $n + 1$. Se define el espacio proyectivo asociado a E o la proyectivización de E , $\mathbb{P}(E)$, como el conjunto cociente de $E - \{0\}$ por la relación de equivalencia:

$$e, e' \in E - \{0\}, \quad e \sim e' \text{ si y sólo si existe } \lambda \in k^* \text{ con } e = \lambda e'$$



Sea E un k -espacio vectorial de dimensión $n + 1$. Se define el espacio proyectivo asociado a E o la proyectivización de E , $\mathbb{P}(E)$, como el conjunto cociente de $E - \{0\}$ por la relación de equivalencia:

$$e, e' \in E - \{0\}, \quad e \sim e' \text{ si y sólo si existe } \lambda \in k^* \text{ con } e = \lambda e'$$

Es decir, $\mathbb{P}(E)$ es el conjunto de los subespacios de dimensión 1 del espacio vectorial E (rectas que pasan por el origen). Se tiene la aplicación de paso al cociente:

$$\begin{aligned} \pi: E - \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}(E) \\ e &\rightarrow \langle e \rangle \end{aligned}$$



Un subconjunto V de $\mathbb{P}(E)$ es una subvariedad lineal cuando $V = \pi(E')$ con E' subespacio vectorial de E . $\dim V = \dim E' - 1$.

Las transformaciones, conocidas como proyectividades, son la proyectivización de las aplicaciones lineales biyectivas de E .
Forman el grupo general lineal proyectivo $PGL(n, k)$.

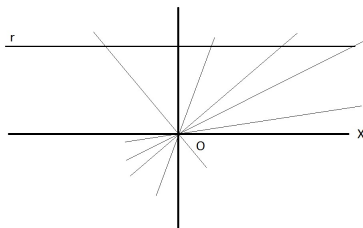


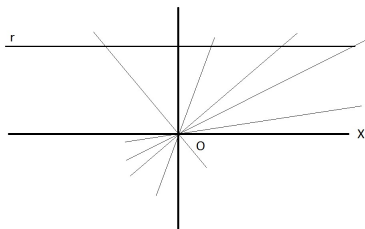
Un subconjunto V de $\mathbb{P}(E)$ es una subvariedad lineal cuando $V = \pi(E')$ con E' subespacio vectorial de E . $\dim V = \dim E' - 1$.

Las transformaciones, conocidas como proyectividades, son la proyectivización de las aplicaciones lineales biyectivas de E .
Forman el grupo general lineal proyectivo $PGL(n, k)$.

No existe noción de punto del infinito en el espacio proyectivo.
Retomemos la idea de proyección.

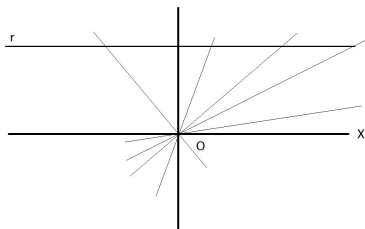






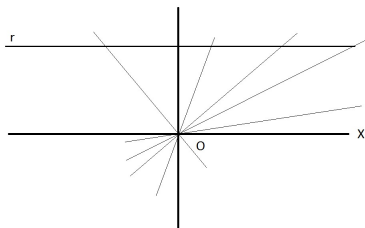
El **espacio afín** es la pareja $(\mathbb{P}(E), H_\infty)$. Los puntos del infinito son los puntos de H_∞ y los puntos propios son el complementario.





El **espacio afín** es la pareja $(\mathbb{P}(E), H_\infty)$. Los puntos del infinito son los puntos de H_∞ y los puntos propios son el complementario. Paralelismo: dos rectas son paralelas si se cortan en el infinito.





El **espacio afín** es la pareja $(\mathbb{P}(E), H_\infty)$. Los puntos del infinito son los puntos de H_∞ y los puntos propios son el complementario. Paralelismo: dos rectas son paralelas si se cortan en el infinito. Las afinidades (transformaciones del espacio afín) son las proyectividades que dejan estables los puntos del infinito.



Una geometría es un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ real y la clase lineal de un tensor 2 -contravariante (métrica en el dual), $\langle \Omega^2 \rangle$, en E , que se conoce como el **absoluto de la geometría**.

Siguiendo las ideas de Riemann y de Klein, el absoluto y sus trasformaciones determinan la geometría. Las transformaciones son el subgrupo de proyectividades que dejan invariante el absoluto, es decir, producen isometrías de Ω^2 .



Una geometría es un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ real y la clase lineal de un tensor 2 -contravariante (métrica en el dual), $\langle \Omega^2 \rangle$, en E , que se conoce como el **absoluto de la geometría**.

Siguiendo las ideas de Riemann y de Klein, el absoluto y sus transformaciones determinan la geometría. Las transformaciones son el subgrupo de proyectividades que dejan invariante el absoluto, es decir, producen isometrías de Ω^2 .

Se demuestra que las Geometrías con puntos propios son:

- La euclídea: el absoluto tiene rango $n = \dim E - 1$, índice 0,
- La hiperbólica: el absoluto tiene rango $n + 1 = \dim E$, índice 1,
- La elíptica el absoluto tiene rango $n + 1 = \dim E$, índice 0.



- Sobre 1935, Birkhoff y Menger publican una presentación axiomática de la geometría proyectiva, libre de la noción de cuerpo base, cubriendo incluso modelos no algebraicos.



- Sobre 1935, Birkhoff y Menger publican una presentación axiomática de la geometría proyectiva, libre de la noción de cuerpo base, cubriendo incluso modelos no algebraicos.
- **Axiomas del plano proyectivo:** Un plano proyectivo será la pareja $(\mathbb{P}^2, \mathcal{R})$, donde $\mathbb{P}^2$ es un conjunto y $\mathcal{R}$ es una familia de subconjuntos propios y no vacíos de $\mathbb{P}^2$, que llamaremos rectas, tales que verifican los siguientes axiomas de incidencia:



- Sobre 1935, Birkhoff y Menger publican una presentación axiomática de la geometría proyectiva, libre de la noción de cuerpo base, cubriendo incluso modelos no algebraicos.
- **Axiomas del plano proyectivo:** Un plano proyectivo será la pareja $(\mathbb{P}^2, \mathcal{R})$, donde $\mathbb{P}^2$ es un conjunto y $\mathcal{R}$ es una familia de subconjuntos propios y no vacíos de $\mathbb{P}^2$, que llamaremos rectas, tales que verifican los siguientes axiomas de incidencia:
 - Dos puntos distintos de $\mathbb{P}^2$ pertenecen a una única recta.



- Sobre 1935, Birkhoff y Menger publican una presentación axiomática de la geometría proyectiva, libre de la noción de cuerpo base, cubriendo incluso modelos no algebraicos.
- **Axiomas del plano proyectivo:** Un plano proyectivo será la pareja $(\mathbb{P}^2, \mathcal{R})$, donde $\mathbb{P}^2$ es un conjunto y $\mathcal{R}$ es una familia de subconjuntos propios y no vacíos de $\mathbb{P}^2$, que llamaremos rectas, tales que verifican los siguientes axiomas de incidencia:
 - Dos puntos distintos de $\mathbb{P}^2$ pertenecen a una única recta.
 - Dos rectas distintas se cortan en un único punto.



- Sobre 1935, Birkhoff y Menger publican una presentación axiomática de la geometría proyectiva, libre de la noción de cuerpo base, cubriendo incluso modelos no algebraicos.
- **Axiomas del plano proyectivo:** Un plano proyectivo será la pareja $(\mathbb{P}^2, \mathcal{R})$, donde $\mathbb{P}^2$ es un conjunto y $\mathcal{R}$ es una familia de subconjuntos propios y no vacíos de $\mathbb{P}^2$, que llamaremos rectas, tales que verifican los siguientes axiomas de incidencia:
 - Dos puntos distintos de $\mathbb{P}^2$ pertenecen a una única recta.
 - Dos rectas distintas se cortan en un único punto.
- Las transformaciones son las aplicaciones biyectivas de $\mathbb{P}^2$ que transforman rectas en rectas, o lo que es lo mismo, tres puntos alineados en tres puntos alineados. Se conocen también con el nombre de colineaciones o proyectividades de Staudt.



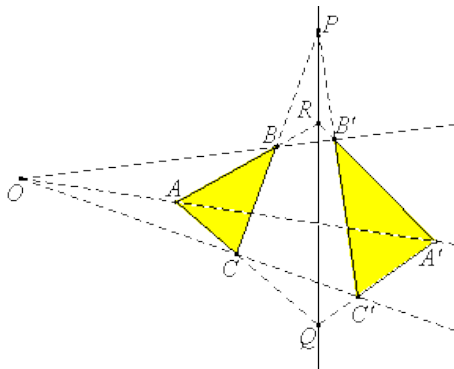
- ¿Qué relación tiene la geometría proyectiva axiomática y la algebraica?



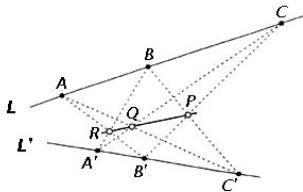
- ¿Qué relación tiene la geometría proyectiva axiomática y la algebraica?



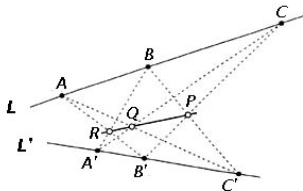
- ¿Qué relación tiene la geometría proyectiva axiomática y la algebraica?
- Una geometría plana axiomática se corresponda con una algebraica si verifica el teorema de Desargües.



- Además, Hilbert probó que una geometría proyectiva axiomática se puede definir algebraicamente sobre un cuerpo conmutativo (el cuerpo base del espacio vectorial) si y sólo si se verifica el Teorema de Pappus (eje transversal de una proyectividad entre dos rectas)



- Además, Hilbert probó que una geometría proyectiva axiomática se puede definir algebraicamente sobre un cuerpo conmutativo (el cuerpo base del espacio vectorial) si y sólo si se verifica el Teorema de Pappus (eje transversal de una proyectividad entre dos rectas)



- Teorema Fundamental de la Geometría Projectiva



Geometría Algebraica

- A finales del siglo XIX, las demostraciones con cálculos en coordenadas desaparecieron de la geometría proyectiva y se impusieron los razonamientos puramente lógicos a través del álgebra lineal, siendo un primer ejemplo o precursor de la Geometría Algebraica.



Geometría Algebraica

- A finales del siglo XIX, las demostraciones con cálculos en coordenadas desaparecieron de la geometría proyectiva y se impusieron los razonamientos puramente lógicos a través del álgebra lineal, siendo un primer ejemplo o precursor de la Geometría Algebraica.
- A finales del siglo XIX y principios del siglo XX hay que destacar los trabajos de la Escuela Italiana (Bertini, Segre, Castelnuovo, Enriques y Severi).



Geometría Algebraica

- A finales del siglo XIX, las demostraciones con cálculos en coordenadas desaparecieron de la geometría proyectiva y se impusieron los razonamientos puramente lógicos a través del álgebra lineal, siendo un primer ejemplo o precursor de la Geometría Algebraica.
- A finales del siglo XIX y principios del siglo XX hay que destacar los trabajos de la Escuela Italiana (Bertini, Segre, Castelnuovo, Enriques y Severi).



Geometría Algebraica

- A finales del siglo XIX, las demostraciones con cálculos en coordenadas desaparecieron de la geometría proyectiva y se impusieron los razonamientos puramente lógicos a través del álgebra lineal, siendo un primer ejemplo o precursor de la Geometría Algebraica.
- A finales del siglo XIX y principios del siglo XX hay que destacar los trabajos de la Escuela Italiana (Bertini, Segre, Castelnuovo, Enriques y Severi). **No lograron expresar con suficiente rigor la gran intuición geométrica que poseían.**



Geometría Algebraica

- A finales del siglo XIX, las demostraciones con cálculos en coordenadas desaparecieron de la geometría proyectiva y se impusieron los razonamientos puramente lógicos a través del álgebra lineal, siendo un primer ejemplo o precursor de la Geometría Algebraica.
- A finales del siglo XIX y principios del siglo XX hay que destacar los trabajos de la Escuela Italiana (Bertini, Segre, Castelnuovo, Enriques y Severi). **No lograron expresar con suficiente rigor la gran intuición geométrica que poseían.**
- Entre 1935 y 1950, Zariski y Weil dieron una base algebraica a la intuición de la Escuela Italiana, utilizando los resultados de la Escuela Algebraista Alemana (Kronecker, Dedekind, Weber, Krull).



- Su idea se basó en darle más importancia a las funciones u observaciones de una variedad que a los propios puntos.



- Su idea se basó en darle más importancia a las funciones u observaciones de una variedad que a los propios puntos.
- Clásicamente: Una variedad era el conjunto de puntos $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del espacio afín k^n que satisfacían un número finito de ecuaciones polinómicas:

$$\{P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$



- Su idea se basó en darle más importancia a las funciones u observaciones de una variedad que a los propios puntos.
- Clásicamente: Una variedad era el conjunto de puntos $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del espacio afín k^n que satisfacían un número finito de ecuaciones polinómicas:

$$\{P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

- Las soluciones de las ecuaciones dadas no varían si se consideran todas las ecuaciones:

$$a_1 \cdot P_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_r \cdot P_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

El subconjunto de todas estas ecuaciones forman lo que se llama un ideal del anillo de polinomios.



- Su idea se basó en darle más importancia a las funciones u observaciones de una variedad que a los propios puntos.
- Clásicamente: Una variedad era el conjunto de puntos $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del espacio afín k^n que satisfacían un número finito de ecuaciones polinómicas:

$$\{P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

- Las soluciones de las ecuaciones dadas no varían si se consideran todas las ecuaciones:

$$a_1 \cdot P_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_r \cdot P_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

El subconjunto de todas estas ecuaciones forman lo que se llama un ideal del anillo de polinomios.



- Su idea se basó en darle más importancia a las funciones u observaciones de una variedad que a los propios puntos.
- Clásicamente: Una variedad era el conjunto de puntos $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del espacio afín k^n que satisfacían un número finito de ecuaciones polinómicas:

$$\{P_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, P_r(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

- Las soluciones de las ecuaciones dadas no varían si se consideran todas las ecuaciones:

$$a_1 \cdot P_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_r \cdot P_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

El subconjunto de todas estas ecuaciones forman lo que se llama un ideal del anillo de polinomios. **Por tanto, una variedad algebraica afín puede ser considerada como el conjunto de ceros de un ideal del anillo de polinomios.**



- ¿Ideales diferentes pueden definir el mismo conjunto de ceros?
En el plano, como conjunto de puntos, las variedades $\{x = 0\}$ y $\{x^2 = 0\}$ son iguales, pero una es una recta y la otra, una cónica (recta doble).



- ¿Ideales diferentes pueden definir el mismo conjunto de ceros?
En el plano, como conjunto de puntos, las variedades $\{x = 0\}$ y $\{x^2 = 0\}$ son iguales, pero una es una recta y la otra, una cónica (recta doble).
- Como los ideales (x) y (x^2) son diferentes, nos permiten distinguir las variedades anteriores.



- ¿Ideales diferentes pueden definir el mismo conjunto de ceros?
En el plano, como conjunto de puntos, las variedades $\{x = 0\}$ y $\{x^2 = 0\}$ son iguales, pero una es una recta y la otra, una cónica (recta doble).
- Como los ideales (x) y (x^2) son diferentes, nos permiten distinguir las variedades anteriores.
- En consecuencia, las variedades algebraicas afines se corresponden con los ideales I del anillo de polinomios, o equivalentemente, con las k -álgebras finito generadas $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$.



- ¿Ideales diferentes pueden definir el mismo conjunto de ceros?
En el plano, como conjunto de puntos, las variedades $\{x = 0\}$ y $\{x^2 = 0\}$ son iguales, pero una es una recta y la otra, una cónica (recta doble).
- Como los ideales (x) y (x^2) son diferentes, nos permiten distinguir las variedades anteriores.
- En consecuencia, las variedades algebraicas afines se corresponden con los ideales I del anillo de polinomios, o equivalentemente, con las k -álgebras finito generadas $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$.
- ¿Se puede dar la definición de una variedad sin estar sumergida en el espacio afín (anillos de polinomios)? Es decir, ¿dado el anillo A se puede definir la variedad asociada?



- Para lograrlo, es necesario definir un punto de la variedad asociada a partir de la estructura de anillo de A , y este es el punto crucial de la Geometría Algebraica.



- Para lograrlo, es necesario definir un punto de la variedad asociada a partir de la estructura de anillo de A , y este es el punto crucial de la Geometría Algebraica.
- Los puntos van a algunos ideales (“ ciertos subconjuntos”) del propio anillo, conocidos como ideales primos que verifican ciertas propiedades. Este conjunto formado por los ideales primos de un anillo se conoce como el espectro del anillo. Topología de Zariski.



- Para lograrlo, es necesario definir un punto de la variedad asociada a partir de la estructura de anillo de A , y este es el punto crucial de la Geometría Algebraica.
- Los puntos van a algunos ideales (“ ciertos subconjuntos”) del propio anillo, conocidos como ideales primos que verifican ciertas propiedades. Este conjunto formado por los ideales primos de un anillo se conoce como el espectro del anillo. Topología de Zariski.
- Las funciones de esta variedad (espectro del anillo) son por definición el propio anillo.



- Para lograrlo, es necesario definir un punto de la variedad asociada a partir de la estructura de anillo de A , y este es el punto crucial de la Geometría Algebraica.
- Los puntos van a algunos ideales (“ ciertos subconjuntos”) del propio anillo, conocidos como ideales primos que verifican ciertas propiedades. Este conjunto formado por los ideales primos de un anillo se conoce como el espectro del anillo. Topología de Zariski.
- Las funciones de esta variedad (espectro del anillo) son por definición el propio anillo.
- De esta forma, toda la información de la variedad está en el anillo de partida. Por tanto, para la Geometría Algebraica lo importante son las funciones, el anillo (álgebra), de ahí su nombre.



- Una variedad algebraica es un espacio con un atlas o cartas isomorfas a espectros de anillos con condiciones de compatibilidad (igual que las variedades diferenciables)



- Una variedad algebraica es un espacio con un atlas o cartas isomorfas a espectros de anillos con condiciones de compatibilidad (igual que las variedades diferenciables)
- Años 50: la Escuela Francesa, dirigida principalmente por H. Cartan, Serre, Dieudonné y Grothendieck, reescribió los fundamentos de la Geometría Algebraica.

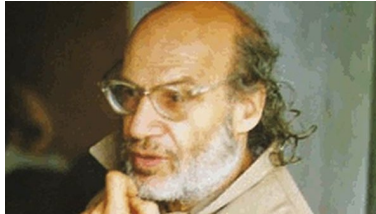


- Una variedad algebraica es un espacio con un atlas o cartas isomorfas a espectros de anillos con condiciones de compatibilidad (igual que las variedades diferenciables)
- Años 50: la Escuela Francesa, dirigida principalmente por H. Cartan, Serre, Dieudonné y Grothendieck, reescribió los fundamentos de la Geometría Algebraica.
- Grothendieck presentó la definición de **esquema**: espacio anillado que localmente es una variedad algebraica afín; los esquemas son los objetos de la Geometría Algebraica.



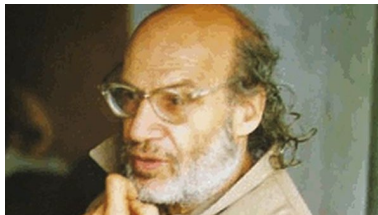
- Una variedad algebraica es un espacio con un atlas o cartas isomorfas a espectros de anillos con condiciones de compatibilidad (igual que las variedades diferenciables)
- Años 50: la Escuela Francesa, dirigida principalmente por H. Cartan, Serre, Dieudonné y Grothendieck, reescribió los fundamentos de la Geometría Algebraica.
- Grothendieck presentó la definición de **esquema**: espacio anillado que localmente es una variedad algebraica afín; los esquemas son los objetos de la Geometría Algebraica.
- La Geometría Algebraica es uno de los mayores avances del siglo XX en las Matemáticas. Se utiliza en importantes teorías físicas, en la teoría de códigos y en la criptografía. Además proporciona técnicas similares para estudiar la geometría algebraica clásica y la aritmética.





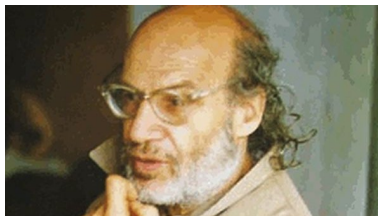
Alexander Grothendieck falleció el pasado mes de noviembre. Fue uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX. Pretendió refundar la matemática con la geometría algebraica.





Alexander Grothendieck falleció el pasado mes de noviembre. Fue uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX. Pretendió refundar la matemática con la geometría algebraica. Después de una infancia difícil, se estableció en Francia. En el I.H.E.S., celebró los Seminarios de Geometría Algebraica (SGA) y escribió los Elementos de Geometría Algebraica (EGA).





Alexander Grothendieck falleció el pasado mes de noviembre. Fue uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX. Pretendió refundar la matemática con la geometría algebraica. Después de una infancia difícil, se estableció en Francia. En el I.H.E.S., celebró los Seminarios de Geometría Algebraica (SGA) y escribió los Elementos de Geometría Algebraica (EGA). Grothendieck decidió en 2010, desde un exilio autoimpuesto desde 1988, prohibir toda reproducción presente o futura de su trabajo.



“Nadie, por genial que sea, puede reclamar la posesión del conocimiento científico. Las patentes, sí; pero las matemáticas aún no han sido patentadas”. Roy Lisker



“Nadie, por genial que sea, puede reclamar la posesión del conocimiento científico. Las patentes, sí; pero las matemáticas aún no han sido patentadas”. Roy Lisker

Una de sus metáforas es sobre dos tipos de matemáticos, el que abriría una nuez con martillo y cincel y el que, pacientemente, la sumerge en agua y espera, con el paso de los meses, a que el líquido penetre y se pueda partir cerrando la mano sin más.

Así era como entendía las Matemáticas.



“Nadie, por genial que sea, puede reclamar la posesión del conocimiento científico. Las patentes, sí; pero las matemáticas aún no han sido patentadas”. Roy Lisker

Una de sus metáforas es sobre dos tipos de matemáticos, el que abriría una nuez con martillo y cincel y el que, pacientemente, la sumerge en agua y espera, con el paso de los meses, a que el líquido penetre y se pueda partir cerrando la mano sin más.

Así era como entendía las Matemáticas.

Su figura, en el futuro, se equiparará a las de Euclides, Fermat, Newton, Gauss, Galois y Riemann, entre otros.



Espero haberos mostrado todo un mundo que os queda por descubrir y en el que hay mucho por investigar.



Espero haberos mostrado todo un mundo que os queda por descubrir y en el que hay mucho por investigar.

“Uno de los misterios profundos de la vida es la forma en la cual la mejor matemática pura, interesante por sí misma, inexplicablemente e impredeciblemente resulta ser útil”.
P. Griffiths.



Espero haberos mostrado todo un mundo que os queda por descubrir y en el que hay mucho por investigar.

“Uno de los misterios profundos de la vida es la forma en la cual la mejor matemática pura, interesante por sí misma, inexplicablemente e impredeciblemente resulta ser útil”.
P. Griffiths.

!!! GRACIAS !!!



REFERENCIAS

- Aroca, J.M. y Fernández Bermejo, M.J.: “Notas sobre Geometría Projectiva”. Universidad de Valladolid (2009)
- Exposición “Orígenes de la Geometría Projectiva”. Universidad Complutense de Madrid (2002).
- Gómez González, E.: Proyecto en Geometría Algebraica. Universidad de Salamanca (1997)
- Kline, M.: “El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días”. Alianza (1992)
- Pastor, R.: “Geometría Projectiva Superior”. Madrid (1916)



- Rodríguez, J.M. y Ruíz, J.M.: “Geometría Proyectiva”. Addison-Wesley (1998).
- Samuel, P.: “Projective Geometry”. Springer -Verlag (1988).
- Sancho de Salas, F.: “Perspectiva histórica de las Geometrías no euclídeas”. Notas. Universidad de Salamanca.
- Santaló, L.A.: “Geometría Proyectiva”. Editorial Universitaria de Buenos Aires (1966)

